توظيف التاريخ في تدريس الرياضيات فيثاغورس والمعادلات التربيعية .. وآفاق أخرى

الدكتور/ ريموند إف. تِنانت Raymond F. Tennant

كلية الآداب والعلوم- العلوم الطبيعية والكمية

جامعة زايد

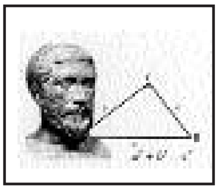
مقدمة

عندما كنت طالباً جامعياً متخصصاً في مادة الرياضيات منذ سنوات عديدة مضت، شغفت بدراسة تاريخ العالم. وبينما كنت أسجل اسمي لدراسة التاريخ الروسي في أحد الفصول الدراسية لاحظت أن هناك اثنين من الأساتذة يدرِّسان نفس المقرر. وكان أحد زملائي قد تتلمذ على يد هذين الأستاذين فطلبت منه أن يصف لي أسلوب كل منهما في التدريس. فأوضح لي أن الأستاذ الأول يحب أن ينظر إلى التاريخ وكأنه يستقل سفينة فضاء تحلق على ارتفاع شاهق فوق الأرض. أو بمعنى آخر ..كان شغوفاً بالمنظور الأعم والأشمل للأشياء، ودأب على تفسير ما يحدث في مختلف بقاع الأرض في فترة زمنية معينة كي يدرك الطلبة مدى التأثير الذي تخلفه إحدى المناطق على الأخرى. أما الأستاذ الثاني -على حد وصف زميلي- فقد كان مهتماً بالمنظور المحلي. ويشرح الموضوعات بأسلوب وصفه زميلي بأنه يجعل الطلبة يشعرون وكأنهم في غابة يتأرجحون فيها من شجرة تسمى الامبراطورة كاترين العظمى إلى أخرى اسمها إيفان الرهيب، وثالثة أطلق عليها اسم نابليون.

هذان المنظوران المختلفان في التدريس يمكن تطبيقهما إلى حد ما على كافة العلوم الأكاديمية، بل وعلى جميع الطلبة في مختلف المراحل الدراسية. وبالنسبة لتدريس مادة الرياضيات على مستوى المدارس الثانوية والجامعة هناك ضرورة ملحة للارتقاء من موضوع الى آخر لاحتواء المنهج الدراسي المحدد، وإكساب الطلبة المهارات المطلوبة والإعداد للمناهج الدراسية اللاحقة. هذا "التأرجح بين الأشجار" -على حد وصف صديقي - يساعد الطلبة على التركيز، كما يساعد على تقويم مدى اكتساب الطلبة للمخرجات التعليمية المطلوبة.

وتكمن إحدى مشاكل هذا المنظور المحلي المكثف في تدريس مادة الرياضيات في احتمال عدم تمكن الطلبة "من رؤية الغابة من خلال الأشجار". وقد يشعر الطلبة أن الرياضيات عبارة عن سلسلة موضوعات لا نهائية، ذات مناهج مختلفة معزولة عن بعضها البعض اللهم باستثناء بعض الأفكار الفرعية التي تربط فيما بينها. ولكن من ناحية أخرى، إذا أتيحت للطلبة فرصة النظر إلى مادة الرياضيات من منظور شامل - وكأنهم يحلقون في رحلة فضائية فوق الأرض- فإنهم قد يستطيعون ربط الأفكار ببعضها البعض وتعميق فهمهم الشامل لها. هذا المنظور الكلي للرياضيات قد يعطى الطلبة إحساساً أعمق بجمالها، ويمكنهم من اكتشاف الثراء المتنوع الكامن وراءها ... ألا وهو تاريخ علم الرياضيات.

تعتبر القصص المستمدة من تاريخ مادة الرياضيات أدوات فعالة لإعطاء الطلبة هذا المنظور الشامل كما سنوضحه في المثال التالي. وقد استخدمنا الصور المرئية سواء كانت على هيئة طوابع بريد أو صور فوتوغرافية أو أي أشكال أخرى لتوضيح هذا المثال، ولإلقاء مزيد من الضوء على الموضوع. وما هذا المثال إلا نظرة خاطفة على التطور التاريخي لموضوعين رياضيين معروفين لمعظم طلبة المدارس الثانوية والمرحلة الجامعية ألا وهما نظرية فيثاغورس (شكل ١) والمعادلة التربيعية.



شكل (١) : فيثاغورس طابع بريدى سنة ٢٠٠١ عام الرياضيات العالمي

كثير من الطلبة يحفظون المعادلة التربيعية عن ظهر قلب: "سالب ب زائد أو ناقص الجذر التربيعي لـ ب تربيع ناقص ٤ أ ج مقسوماً على ٢ أ". وإذا سألت عما إذا كانت هذه النظرية مفيدة، ربما وجدت أن كثيراً من الطلبة الذين كانوا يحفظونها لن يتذكروا أنها توصلت إلى جذور المعادلة التربيعية أ س ٢ + ب س + ج = صفر. بل وستجد عدداً أقل من ذلك لديهم فكرة عن أصل المكان الذي نشأت فيه المعادلة التربيعية.

وإذا سألت عن نظرية فيثاغورس ، ستجد الكثير من الطلبة يتذكرون المعادلة س٢ + ص٢ = ع ٢ لكنهم قد لا يتذكرون ارتباطها بالقاعدة الهندسية التي تنص على أن "مربع الوتر في المثلث قائم الزاوية يساوي مجموع مربعي الضلعين الآخرين" .

وكذلك قد لا يكون الارتباط الطبيعي بين الفكرتين واضحاً في أذهانهم.

إذن، ما هو المنشأ والتاريخ وراء نظرية فيثاغورس والمعادلة التربيعية؟ وما هي الأدوار التي لعبتها الحضارات المختلفة لتطوير هذه النظريات؟ بل وربما يكون السؤال الأهم بالنسبة للمعلمين اليوم هو: هل تعريف الطلبة بتاريخ الأفكار الرياضية سيعطيهم فهماً أوسع وأشمل للمادة أم لا؟ سنحاول هنا مناقشة السؤالين الأولين ، بينما نترك شرح السؤال الثالث للمدرسين في فصولهم.

البابليون:

تظهر النقوش المسمارية التي تعود إلى ٧٢٨٩ سنة قبل الميلاد (شكل ٢) من المجموعة البابلية في ييل Yale والتي يعود تاريخها إلى حوالي (١٨٠٠-١٦٠٠ قبل الميلاد)، مربعاً عليه أرقام محفورة. ويحتوي النظام الرقمي البابلي على رمزين أساسيين: رمز على شكل رأس سهم يشير إلى أسفل ويمثل الرقم ١ ، ورأس سهم يشير إلى اليمين ويمثل الرقم ١٠. وقد كان نظامهم الرقمي ستينياً - الأساس ٦٠ - بينما كان يكتب كل رقم من (صفر) إلى ٥٩ بالأساس ١٠ .

الشكل (٢) سنة ٧٢٨٩ قبل الميلاد المجموعة البابلية في ييل تصوير بيل كاسيلمان Bill Casselman

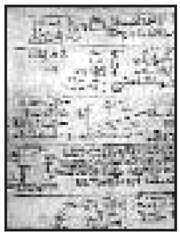
وقد كتب على قطر المربع :

$$1+\frac{24}{(60)}+\frac{51}{(60)^2}+\frac{10}{(60)^3}=1.414212963.$$

هذا الرقم يشبه إلى حد بعيد قيمة الجذر التربيعي للرقم ٢ التي تساوي ١,٤١٤٢١٣٥٦٢ , $\sqrt{2}=1.414213562\ldots$ حيث يتفقان في خمسة أرقام قبل العلامة العشرية. وتتشابه هذه الأرقام إلى حد يمكن معه القول بأن البابليين قد عرفوا نظرية فيثاغورس قبل ميلاد فيثاغورس بألف عام.

المصريون:

تحتوي بردية برلين (١٨٠٠ قبل الميلاد) وبردية أحمس (١٦٥٠ سنة قبل الميلاد شكل ٣) على عدة مسائل رياضية من مصر القديمة. شملت هذه المسائل الهندسية الأطوال والمساحة. وتشمل المعطيات في إحدى هذه المسائل مربعاً مساحته ١٠٠ ذراع مربع، وأن هذه المساحة تساوي مساحة مربعين أصغر منه.



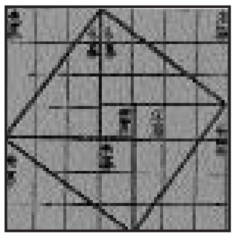
الشكل (٣) بردية أحمس المتحف البريطاني

وأحد أضلاع هذه المربعات = ١/٢ + ١/٤ ضلع المربع الآخر. وقد اختزل المصريون أي كسر ليكون مجموعة من الكسور كل منها يحتوي على رقم ١ في البسط. وهذا يكافئ حل النظام ذي المعادلتين
س^٢ + ص^٢ = ١٠٠
وص = ٣/٤ س .

حيث يكون حل المعادلة هو: س = ٨ و ص= ٦ والذي يمثل المعطيات الثلاث في نظرية فيثاغورس ٦^٢+ ٨^٢= ١٠^٢ و كان المصريون القدماء قد عرفوا نظرية فيثاغورس أيضا.

الصين القديمة:

نشأ علم الرياضيات الأول في الصين في عزلة تامة عن بقية أنحاء العالم. وورد في النص الصيني القديم "الكلاسيكية الحسابية للمِيل و الممرات الدائرية في السماء Circular Paths of Heaven " of the Gnomon and the Arithmetic Classic (حوالي ٦٠٠ سنة قبل الميلاد أو قبلها- (الشكل ٤) إثبات لنظرية فيثاغورس يعتمد على حساب مساحة المربع بطريقتين مختلفتين. إذا رمزنا لضلعي المثلث القائم الزاوية بـ س، ص والوتر بـ ع فعندها تكون مساحة المربع الكبير = (س+ص)^٢ . كما تساوي مساحة المربع الكبير أيضاً مساحة المربع الصغير + مساحة المثلثات الأربعة القائمة . أو تساوي ع^٢ +٤(١/٢ س ص). وبمساواتهما تصبح:
(س+ص)^٢ = ع^٢ + ٤ (١/٢ س ص) وبعد التبسيط تصبح النتيجة س^٢ +ص^٢ =ع^٢ وهو إثبات النظرية.



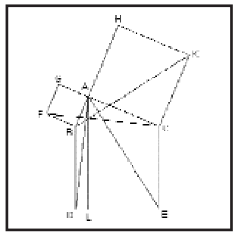
الشكل (٤) الإثبات الصيني الممرات الدائرية في السماء

اليونانيون القدماء

أسس فيثاغورس (حوالي٥٨٠- ٥٠٠ قبل الميلاد) مدرسة في اليونان متخصصة في الرياضيات. واكتشف تلاميذه وأتباعه (الفيثاغوريون) أن هناك أرقاماً غير منطقية مثل الجذر التربيعي لرقم (٢). كان هذا الاكتشاف مناقضاً تماماً لحدسهم الهندسي، و عليه فقد أبقوه طي الكتمان. وكان فيثاغورس شغوفاً بالمسائل المتعلقة بالنظرية التي تحمل اسمه، إلا أنه لا يوجد دليل ملموس على أن فيثاغورس أو أحد أتباع مدرسته قد قدم دليلاً قاطعاً على هذه النظرية. وبعد فيثاغورس بنحو ٢٥٠٠ سنة تبين وجود أكثر من ٣٥٠ إثباتا مختلفاً للنظرية.

ألف إقليدس (حوالي سنة ٣٠٠ قبل الميلاد) كتابه في علم الهندسة (العناصر) الذي ظلت نسخته الأصلية تدرس منذ ذلك الحين حتى القرن العشرين. أعطى إقليدس في الكتاب الأول، في الفرضية رقم ٤٧ من كتاب العناصر، إثباتاً لنظرية فيثاغورس يحتوي على رسم هندسي (شكل x) والذي يشار إليه غالباً باسم (كرسي العروس) ، كما أثبت إقليدس في الفرضية رقم ٤٨ عكس نظرية فيثاغورس . ونصها أنه إذا كانت أضلاع المثلث س، ص، ع تحقق المعادلة س٢+ ص٢=ع٢ إذن فإن هذا المثلث لابد وأن يكون مثلثاً قائم الزاوية.

الشكل (٥) فيثاغورس
من أرشيف بيتمان
Bettmann



الشكل (٦) كرسي العروس

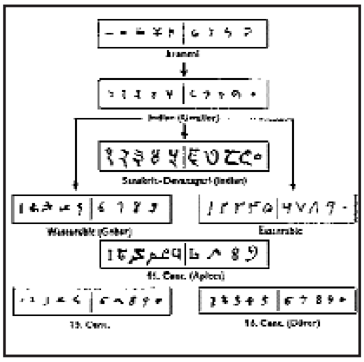
طور ديوفانتس السكندري (حوالي سنة ٣٠٠ ميلادية) في مؤلفه المشهور (علم الحساب) طريقة لاستنتاج نظرية فيثاغورس بمعطياتها الثلاث، وهي مجموعات من ثلاثة أعداد صحيحة موجبة مثل ٣،٤،٥ أو ٥،١٢،١٣ تحقق المعادلة س٢+ص٢=ع٢ (شكل ٧). والحقيقة أن محاولة ديوفانتس لتحليل مربع من مجموع مربعين آخرين قد ساعدت عالم الرياضيات الفرنسي الشهير في القرن السابع عشر "فيرما "Fermat على التوصل إلى نظريته الشهيرة التي تعرف الآن "بالنظرية الأخيرة". وقد اهتم ديوفانتس بإيجاد حلول لمسائل عديدة أخرى مستخدماً الأعداد الصحيحة والتي تعرف الآن بمعادلات ديوفانتس.

الشكل (٧)
$3^2+4^2=5^2$
طابع بريد

الهند:

طور عالم الرياضيات الهندي العظيم براهماجوبتا (٥٩٨-٦٦٥ تقريباً) أعمال د يوفانتس، فبينما اهتم ديوفانتس عادة بإيجاد عدد صحيح واحد كحلّ لمعادلة ما ، حاول براهماجوبتا إيجاد طرق عدة للحصول على كل الحلول الممكنة. وكذلك اهتم بإيجاد أعداد صحيحة كحلول لمعادلات تربيعية ذات مجهولين على الصورة التالية أس٢+ ج= ص٢، والتي تعد تنويعاً على معادلة فيثاغورس. وكحل للمعادلة ٩٢س٢+١=ص٢ وجد أن أصغر عدد صحيح للمتغير س= ١٢٠ و ص= ١١٥١ مستخدماً طريقة حسابية صعبة.

وقد استطاع بهاسكارا (١١١٤-١١٨٥) - وهو أحد خلفاء برهماجوبتا- حل المعادلة ٦١ س٢+١ =ص٢ ووجد أن أصغر عدد صحيح للمتغير س = ٢٢٦١٥٣٩٨٠ و ص= ١٧٦٦٣١٩٠٤٩ وهو ما يعتبر إنجازاً عظيماً دون استخدام الحاسب الآلي.



الشكل (٨) الأرقام الهندية - العربية
سوامي بي. بي. فشنو Swami B.B. Visnu

وقد أسهم علماء الرياضيات الهنود آنذاك في تطوير النظام الرقمي المحتوي على الرقم صفر، وهو النظام الذي أخذ طريقه الى علماء الرياضيات المسلمين في الشرق الأوسط ثم أسفر أخيراً عن النظام الرقمي الغربي الحالي (شكل ٨) والذي تعرف أعداده بالأرقام الهندية - العربية.

العالم الإسلامي

يعد محمد بن موسى الخوارزمي (٧٨٠ - ٨٥٠) أحد علماء الرياضيات المسلمين في القرن التاسع هو "أبو الجبر" بحق، فقد اشتقت كلمة الجبر من كتابه المعروف باسم "حساب الجبر والمقابلة". وتكمن جذور المعادلة التربيعية في محاولات الخوارزمي الأولى لحل تلك المعادلات التربيعية . ومن اللافت للنظر أن الخوارزمي لم يستخدم أبداً المتغيرات في إيجاد حلول المعادلات بينما استخدم الكلمات عوضاً عنها. وعلى سبيل المثال قام الخوارزمي بحل هذه المعادلة س٢+١٠س=٣٩ ولكن بطبيعة الحال لم تكن تلك هي طريقة الخوارزمي في كتابة المعادلة فقد كانت طريقته لشرح المعادلة وحلها كالآتي:

الشكل (٩) الخوارزمي
طابع بريد - الاتحاد السوفييتي-
سنة ١٩٨٣

... مربع عدد إذا أضيف إليه عشرة أمثال جذره التربيعي كان الناتج ٣٩ وحدة. وهكذا فإن السؤال في هذا النوع من المعادلات هو: ما هو الرقم المربع الذي إذا جمع مع عشرة أضعاف جذره التربيعي كان الناتج ٣٩ ؟ ولحل هذا النوع من المعادلات يؤخذ نصف

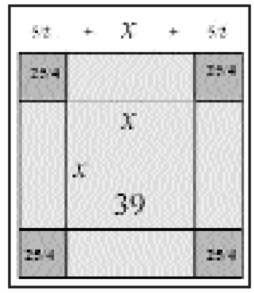
أضعاف الجذر المذكورة والتي تساوي ١٠ في هذه المسألة. وهكذا نأخذ ٥ وتضرب في نفسها لتعطي ٢٥ . وعند إضافتها إلى ٣٩ تعطي ٦٤. وبأخذ الجذر التربيعي لها وهو ٨ يطرح منه نصف الأضعاف ٥ فيتبقى ٣. وهكذا يمثل العدد ٣ أحد جذور العدد المربع الذي هو ٩. أي أن ٩ هو الرقم المربع المطلوب لحل المسألة.

وإذا ترجمت كلمات الخوارزمي إلى صورة هندسية لابراز أسلوب استكمال المربع. والأكثر من ذلك أنه إذا ترجمت الهندسة إلى معلومات جبرية حديثة، تكون خطوات الحل كالآتي:

س٢+١٠س+٢٥=٣٩+٢٥=٦٤

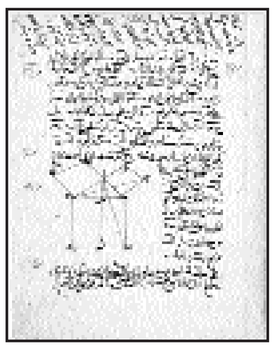
وبما أن (س+٥) ٢ =٦٤

و(س+ ٥)=٨ إذن س=٣ . ولو أخذت الحلول السالبة في الاعتبار، لاعتبرت حلول الخوارزمي قفزة قصيرة من المعادلات التربيعية كما هي عليه الآن.



الشكل (١٠)
"استكمال المربع"

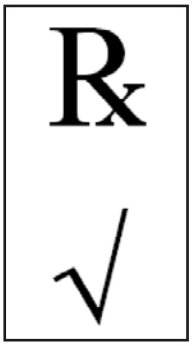
قدم علماء الرياضيات المسلمون في القرون الوسطى ثروة من الأفكار الرياضية الجديدة كما قاموا بدور كبير في المحافظة على كثير من النتائج التي توصلت إليها الحضارات السابقة. وقد احتوت مخطوطة عالم الرياضيات المسلم الشهير ناصر الدين الطوسي في القرن الثالث عشر (١٢٠١-١٢٧٤ م) إثباتاً لنظرية فيثاغورس (شكل ١١). هذا الإثبات المكتمل بالشكل التوضيحي "كرسي العروس" يعد تنويعاً للإثبات الذي قدمه اليوناني القديم إقليدس. ولعل هذه المخطوطة تنطق عاليا بما كان عليه العصر الذهبي للرياضيات في الشرق الأوسط، عندما قام عباقرة الرياضيات وعلماء الفلك والعلماء من مختلف أنحاء العالم الإسلامي بالمحافظة على الكثير مما توصل إليه علماء الرياضيات اليونانيون القدماء . بل وقاموا بتطوير تلك الإنجازات والبناء عليها.



الشكل (١١)
إثبات إسلامي لنظرية فيثاغورس
مخطوطة من القرن الثالث عشر

تطورات الجذر التربيعي:

ابراهام بارهيه ها-ناسي (سنة ١٠٦٠ - ١١٣٦ ميلادية) هو عالم الرياضيات والفلكي الأسباني الذي ألف أقدم الكتب الأوروبية المفصلة عن الجبر المأخوذ عن العالم الإسلامي. وكان كتابه "رسالة في القياس والحساب" أول مؤلف في أوروبا يحتوي على حل كامل للمعادلة التربيعية العامة. وتمت ترجمة هذا الكتاب إلى اللاتينية بعنوان Liber Embadorum ونشر سنة ١١٤٥ . ومن المصادفات التاريخية أن يترجم كتاب الخوارزمي في الجبر إلى اللاتينية في نفس السنة أيضا، وأن يشتمل على حل كامل للمعادلة التربيعية.



الشكل (١٢)
العلامات الجذرية في شكلها الأول

وقد عكف عدد من علماء الرياضيات على إيجاد رموز جديدة للتعبير عن حلول المعادلة التربيعية . وقد استخدم ليوناردو أوف بيزا Leonardo of Pisa (حوالي ١١٧٥-١٢٥٠) في القرن الثالث عشر الكلمة اللاتينية (radix) ليعبر عن الجذر التربيعي والتي كانت تختصر بالحرف اللاتيني ز مزوداً بشرطة مائلة في نهايته اليمنى (شكل ١٢). وقد ظهر للجذر رمز على هيئة علامة صح بسيطة (شكل ١٢) في القرن السادس عشر، مع وضع أقواس للدلالة على الجذر التربيعي. ثم أضاف رينيه ديكارت (١٥٩٦-١٦٥٠) في كتابه La Géometrie (الهندسة) الذي قدمه عام ١٦٣٧ . الخط الأفقي ليعبر عما يكتب تحت الجذر. ومن هنا جاء شكل المعادلة التربيعية كما نعرفه اليوم وهو:

س = " سالب ب زائد أو ناقص الجذر التربيعي ل ب تربيع ناقص ٤أج مقسوم على ٢أ " والتي تكتب بالإنجليزية على النحو التالي:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

والتي بدورها تعتبر حلاً للمعادلة التربيعية العامة:

أس٢ + ب س +ج =صفر

التوسع فيما بدأه فيثاغورس

استخدم بيير دو فيرما (١٦٠١-١٦٦٥) حوالي سنة ١٦٣٧ النتائج التي توصل إليها ديوفانتس في بحثه عن حلول المعادلة س٢ + ص٢ =ع٢ بأعداد صحيحة موجبة، واستطاع أن يتوصل إلى حل للمعادلتين س ٣+ ص ٣= ع٣ و س ٤+ ص٤ =ع٤ وهكذا. وكان من عادة فيرما أن يكتب النظريات ومحاولاته لإيجاد إثباتاتها على هوامش الكتب التي يقرأها. ففي نسخته الخاصة من كتاب الرياضيات لديوفانتس أوضح فيرما أنه لا توجد أعداد صحيحة موجبة للمتغير n=5,4,3L في المعادلة:

$$zn = yn + xn$$

لكن نظراً لصغر هامش ذلك الكتاب لم يتم تدوين هذا الاثبات بأكمله. ولقد وافت فيرما المنية قبل أن تواتيه الفرصة للتوسع في اثباتاته.

الشكل (١٣)
بيير دو فيرما ونظريته الأخيرة طابع بريد - فرنسا، ٢٠٠١

حاول العديد من علماء الرياضيات في القرون التي تلت فيرما التوصل إلى إثبات لهذه النظرية. وفي النهاية تم إثبات كل النظريات التي صاغها فيرما وتركها دونما إثبات، وهذا هو الحال أيضا بالنسبة لنظرية المعادلة:

$$x^n + y^n = z^n$$

الشكل (١٤)
آندرو وايلز يثبت معادلة فيرما طابع بريدي- جمهورية التشيك، سنة ٢٠٠٠

والتي عرفت بنظرية فيرما الأخيرة. وفي عام ١٧٧٠ تمكن ليونارد اويلر (١٧٠٧ - ١٧٨٣) Leonhard Euler من إثبات أنه لا توجد أعداد صحيحة موجبة لحل المعادلة س ٣+ ص ٣= ع٣ وكان فيرما قد أثبت من قبل المعادلة س ٤+ ص٤ =ع٤ . وفي عام ١٨٢٥ تمكن كل من آدريان - ماري ليجندر (١٧٥٢ - ١٨٣٣)Adrien-Marie Legendre و لوجون ديريشليه Lejeune Dirichlet (١٨٠٥ -١٨٥٩) من إثبات المعادلة س ٥+ ص٥=ع ٥ وبمرور الوقت وجدت حلول لقيمَ المتزايدة. وبعد ذلك تم إثبات النظرية لفئات معينة من الأدلة الجبرية للأعداد الأولية.

وباستخدام تقنيات الحاسب الآلي ثبت أنه لا توجد أعداد صحيحة موجبة لقيم المتغير النوني "ن " المتزايدة في المعادلة س ن+ ص ن =ع ن . وبازدياد تعقد الإثباتات لمختلف الحالات، أيقن الكثير من علماء الرياضيات أن فيرما لم يكن لديه إثبات، بل كان يظن ذلك. وفي عام ١٩٩٥ وبعد ست سنوات من الجهد المنفرد أعلن اندرو وايلز Andrew Wales (١٩٥٣-) الأستاذ بجامعة برينستُن Princeton أنه توصل إلى إثبات لنظرية فيرما الأخيرة. وبعد أن قضى سنة أخرى في تعديل إثباته الأصلي، تمكنت نتائجه من الصمود أمام تدقيق علماء الرياضيات ووضع حد لهذه المسألة. وكان فيرما محقاً عندما كتب أنه لا توجد أعداد صحيحة موجبة تصلح كحلول للمعادلة س ن+ ص ن=ع ن (شكل أ) للمتغير ن =٣،٤،٥ ل.

الخاتمة:

استغرقت قصة تطوير نظرية فيثاغورس ونشوء المعادلة التربيعية قرابة ٤٠٠٠ سنة، وأثناء هذه المدة لعب كثير من علماء الرياضيات وكثير من الحضارات أدواراً رئيسية من أجل تحقيق ذلك. وتاريخ علم الرياضيات مليء بقصص مماثلة. والحقيقة أنه من المرجح أن يكون أي موضوع رياضي قد يتبادر إلى الذهن مرتبطاً بسلسلة من الاكتشافات وعدد من الشخصيات ذات الصلة، والتي ساهمت في تطويره عبر التاريخ حتى يومنا هذا. ويبقى أمام المعلمين فرصة استخدام هذه القصص الثرية في حجرات الدراسة لإعطاء الطلبة صورة كاملة للرياضيات كمحاولات دءوبة، نابضة بالحياة، ومليئة بالإثارة الذهنية والمثيرة للعقل البشري والروح الإنسانية.

المراجع

١- ابراهام آر - الإثبات الصيني لنظرية فيثاغورس مأخوذ في ١٠ مايو ٢٠٠٢ من الموقع المبين أدناه، (٢٠٠١) .

Abraham, R. "Chinese Proof of the Pythagorean Theorem." (2001). Retrieved 10 May 2002 from [www.visual-euclid.org/chinese/].

٢- بورتُن دي - تأريخ بيرتُن للرياضيات: مقدمة. دوبيك، أيوا ويليام سي براون، (١٩٩٥) .

Burton, D. Burton's History of Mathematics: An Introduction. Dubique, Iowa: William C. Brown, 1995.

٣- كاسلمان بي - سنة ٧٢٨٩ قبل الميلاد،(٢٠٠٠). مأخوذ في ٢٠ أبريل ٢٠٠٢ من الموقع المبين أدناه.

Casselman, B. (photographer) "YBC 7289." Yale Bibliographic Collection, 2000. Retrieved 20 April 2002 from [www.math.ubc.ca/people/faculty/cass/Euclid/ybc/ybc.html].

٤- ماك تيوتر تاريخ أرشيف الرياضيات - أحمس، (١٩٩٧). مأخوذ في ١٥ مارس ٢٠٠٢ من الموقع المبين أدناه.

Mac Tutor History of Mathematics Archive. "Ahmes." (1997). Retrieved 15 March 2002 from [www-gap.dcs.st and.ac.uk/~history/Mathematicians/Ahmes.html].

٥- ميلر جيه - صور علماء الرياضيات على طوابع البريد، (٢٠٠١)، مأخوذة في ١ مايو ٢٠٠٢ من الموقع المبين أدناه.

Miller, J. "Images of Mathematicians on Postage Stamps." (2001). Retrieved 1 May 2002 from [jeff560.tripod.com/]

٦- صليبا ج - إلى من تنتمي علوم العرب في أوروبا أثناء عصر النهضة؟ (١٩٩٩). مأخوذ في ١٥ مارس ٢٠٠٢ من الموقع المبين أدناه.

Saliba, G. "Whose Science is Arabic Science in Renaissance Europe?" (1999). Retrieved 15 March 2002 from [www.columbia.edu/~gas1/project/visions/case1/sci.1.html].

٧- تويتر جي - عام ٢٠٠٠ عام الرياضيات العالمي، (٢٠٠٠). مأخـــوذ في ١ مايو ٢٠٠٢ من الموقع المبين أدناه.

Toener, G. "2000 World Mathematical Year." (2000). Retrieved 1 May 2002 from [www.uni-duisburg.de/FB11/WMY2000/BriefMarken.html].

٨- مكتبة الفاتيكان و ثقافة النهضة - الرياضيات: العلم القديم و المصائر الحديثة، (٢٠٠٢) . مأخوذ في ١ يونيو ٢٠٠٢ من الموقع المبين أدناه.

Vatican Library and Renaissance Culture. "Mathematics: Ancient Science and Modern Fates." (2002). Retrieved 1 June 2002 from [lcweb.loc.gov/exhibits/vatican/math.html].

٩- فيشنو، سوامي بي بي - الرياضيات و الأبعاد الروحية، (١٩٩٧) . مأخوذ في ١ يونيو ٢٠٠٢ من الموقع المبين أدناه.

Visnu, Swami B. B. "Mathematics and the Spiritual Dimension." (1997). Retrieved 1 June 2002 from [www.gosai.com/chaitanya/saranagati/html/vishnu_mjs/math/index.html].

١٠- المؤسسة الجامعية لبحوث المناخ، جامعة ميتشيجان : نوافذ على العالم، (٢٠٠٠). مأخوذ في ١ يونيو ٢٠٠٢ من الموقع المبين أدناه.

University Corporation for Atmospheric Research, University of Michigan. "Windows to the Universe." (2000). Retrieved 1 June 2002 from [www.windows.ucar.edu].